PR5-Interro 1A

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$, avec $0 < a < b$. Donner la fonction de répartition, la densité, l'espérance et la variance de $Y = X^2$.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la loi de $T = \frac{1}{\lambda} \ln(1 - X)$, où $\lambda > 0$. En déduire un algorithme permettant de simuler la loi exponentielle de paramètre 5.

Exercice 3. Théo fait du tir à l'arc sur une cible circulaire de rayon 1. On suppose que Théo est suffisamment maladroit pour que le point d'impact M de coordonnées (X,Y) soit uniformément distribué sur la cible. On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1. Quelle est la densité du couple (X,Y) ?
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
3. Les variables aléatoires Xet Y sont-elles indépendanes ?

Exercice 4. Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[-\pi/2, \pi/2]$. On pose $X = tan(U)$. Déterminer la loi de X, sa densité.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire positive admettant une densité f. On note F_X la fonction de répartition de X. Démontrer que $E(X) = \int_0^\infty (1 - F(x))dx$.

Exercice 6. Soient X, Y deux variables gaussiennes normales centrées réduites indépendantes. Soit ϕ la bijection qui à tout point de $U = \mathbb{R} - \{(x, 0) : x \leq 0\}$ associe les coordonnées polaires $(r, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (0, \infty)$ alors $\phi^{-1}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ est continument différentiable. On définit le couple aléatoire. $(R, \Theta) = \Phi(X, Y)$, donner la densité du vecteur aléatoire (R, Θ).

Exercice 7. (*) La durée de vie des atomes de radon suit une loi exponentielle. La probabilité qu'un atome de radon ne soit pas désintégré en 40s sachant qu'il ne l'est pas en 12s vaut $2\sqrt{2}$. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas désintégré avant 76s sachant qu'il ne l'est pas en 20s ?

Exercice 8. (*) Clément et Amélie se donnent rendez-vous devant une salle de concert entre 19h et 20h. Les instants d'arrivée de Clément et Amélie après 19h sont assimilés à une loi uniforme sur [0,1]. Chacun attend jusqu'à un quart d'heure que l'autre arrive, puis rentre dans la salle. Quelle est la probabilité que Clément et Amélie entrent ensemble dans la salle de concert ? Combien de temps doivent-ils convenir d'attendre pour avoir strictement plus de 50% de chances de se rencontrer ?