Exercice 2 :

Pour montrer que c'est une base on montre que les vecteurs sont libres : et generateurs

$u_1 = (0,1,1) \quad u_2 = (1,0,1) \quad u_3 = (1,1,0)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} L_1 + L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{array}{c} L_1 + L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne $x = 0$

et donc $\boxed{x = y = z = 0}$

c'est une famille libre, or pour qu'elle soit une base il faut qu'elle soit aussi génératrice.

Puisqu'il y a 3 vecteurs libres dans $\mathbb{R}^3$ alors la famille de vecteur (u_1, u_2, u_3) est libre et génératrice, c'est donc une base dans $\mathbb{R}^3$

Exercice 5 :

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x - y - 2z = 0\}$

$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x = 2y = x + z\}$

2/5

une base de E : $[-1,0]$. $[1,0]$.

Exercice 5 :

On a $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x - y - 2z = 0\}$.

On considère $u(-1,1,-1)$ et $v(2,0,1)$ / u et $v \in F$.

M.Q u et v sont libres

On a $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

D'où les vecteurs sont libres

Donc ils forment une base de F

D'où $\dim(F) = 2$.

On a $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = 2y = x + z\}$.

Alors $\begin{cases} x = 2y \\ x + z = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 0 \end{cases}$

Donc $y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Alors le vecteur $w(2,1,0)$ est une base de G

D'où $\dim(G) = 1$.

Calculons $F \cap G$

On a $\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ x = 2y \\ x + z = 2y \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 0 - y - 2z = -2y \Rightarrow z = \frac{1}{2}y \\ 0 - y - 3z = -2y \Rightarrow +\frac{3}{2}y = y \end{cases}$ Impossible

Donc $F \cap G = \emptyset$.

Conclusion

On a $F \cap G = \emptyset$.

et $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

alors F et G sont supplémentaires.

Exercice 7 :

On a : $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x - 2y + z = 0$ et $x + 2yz = 0\}$.

$\dim(F) = 1$

et on a : $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x + 2y + z = 0\}$.

~~On considère $u(1,0,-1)$ et $v(0,1,-2)$ dans G~~

~~M.Q u et v sont libres~~

~~$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$~~

~~D'où u et v forment une base de G~~

~~Donc $\dim(G) = 2$.~~

~~Calculons $F \cap G$~~

~~$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 2yz = 0 \\ x \end{cases}$~~

à ne pas considérer

On a $G : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + 2z = 0\}$.

on considère $u(2,0,-1)$ et $v(1,-1,0)$ dans G

M.Q u et v sont libres

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

D'où u et v forment une base de G

Donc $\dim(G) = 2$